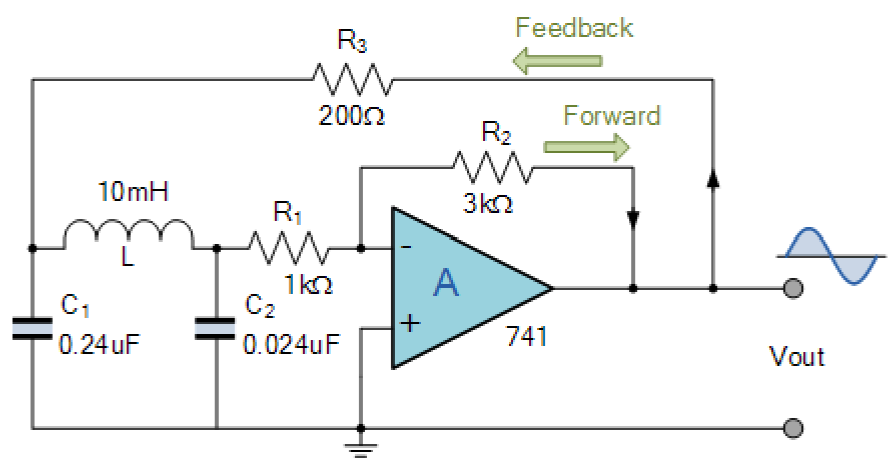
Circuit



Open Loop Analysis

Given

$$V_1 \cdot \left(\frac{1}{R_3} + s \cdot C_1 + \frac{1}{s \cdot L}\right) - \frac{V_I}{R_3} - \frac{V_2}{s \cdot L} = 0$$

$$V_2 \cdot \left(s \cdot C_2 + \frac{1}{s \cdot L} + \frac{1}{R_1}\right) - \frac{V_1}{s \cdot L} = 0$$

$$V_3 = -V_2 \cdot \frac{R_2}{R_1}$$

$$eq1 := \mathrm{Find}(V_1, V_2, V_3) \rightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{C_2 \cdot L \cdot R_1 \cdot V_I \cdot s^2 + L \cdot V_I \cdot s + R_1 \cdot V_I}{R_1 + R_3 + L \cdot s + C_1 \cdot R_1 \cdot R_3 \cdot s + C_2 \cdot R_1 \cdot R_3 \cdot s + C_2 \cdot L \cdot R_1 \cdot s^2 + C_1 \cdot L \cdot R_3 \cdot s^2 + C_1 \cdot C_2 \cdot L \cdot R_1 \cdot R_3 \cdot s^3} \\ \dfrac{R_1 \cdot V_I}{R_1 + R_3 + L \cdot s + C_1 \cdot R_1 \cdot R_3 \cdot s + C_2 \cdot R_1 \cdot R_3 \cdot s + C_2 \cdot L \cdot R_1 \cdot s^2 + C_1 \cdot L \cdot R_3 \cdot s^2 + C_1 \cdot C_2 \cdot L \cdot R_1 \cdot R_3 \cdot s^3} \\ -\dfrac{R_2 \cdot V_I}{R_1 + R_3 + L \cdot s + C_1 \cdot R_1 \cdot R_3 \cdot s + C_2 \cdot R_1 \cdot R_3 \cdot s + C_2 \cdot L \cdot R_1 \cdot s^2 + C_1 \cdot L \cdot R_3 \cdot s^2 + C_1 \cdot C_2 \cdot L \cdot R_1 \cdot R_3 \cdot s^3} \end{pmatrix}$$

$$eq1_2 \rightarrow -\frac{R_2 \cdot V_I}{R_1 + R_3 + L \cdot s + C_1 \cdot R_1 \cdot R_3 \cdot s + C_2 \cdot R_1 \cdot R_3 \cdot s + C_2 \cdot L \cdot R_1 \cdot s^2 + C_1 \cdot L \cdot R_3 \cdot s^2 + C_1 \cdot C_2 \cdot L \cdot R_1 \cdot R_3 \cdot s^3}$$

$$-\frac{R_2 \cdot V_I}{R_1 + R_3 + L \cdot s + C_1 \cdot R_1 \cdot R_3 \cdot s + C_2 \cdot R_1 \cdot R_3 \cdot s + C_2 \cdot L \cdot R_1 \cdot s^2 + C_1 \cdot L \cdot R_3 \cdot s^2 + C_1 \cdot C_2 \cdot L \cdot R_1 \cdot R_3 \cdot s^3} = V_I$$

$$\frac{R_1 \cdot R_3 \cdot L \cdot C_1 \cdot C_2}{R_2} \cdot \left[\frac{R_1 + R_3}{C_1 \cdot C_2 \cdot L \cdot R_1 \cdot R_3} + \left[\frac{L + R_1 \cdot R_3 \cdot (C_1 + C_2)}{L \cdot R_1 \cdot R_3 \cdot C_1 \cdot C_2}\right] \cdot s + L \cdot \left(\frac{C_2 \cdot R_1 + C_1 \cdot R_3}{C_1 \cdot C_2 \cdot L \cdot R_1 \cdot R_3}\right) \cdot s^2 + s^3\right]$$

$$0 = R_1 + R_2 + R_3 + L \cdot s + C_1 \cdot R_1 \cdot R_3 \cdot s + C_2 \cdot R_1 \cdot R_3 \cdot s + C_2 \cdot L \cdot R_1 \cdot s^2 + C_1 \cdot L \cdot R_3 \cdot s^2 + C_1 \cdot C_2 \cdot L \cdot R_1 \cdot R_3 \cdot s^3$$

Values used in Reference Circuit

$L := 10\text{mH}$

$C_1 := 0.24\mu\text{F}$

$C_2 := 0.024\mu\text{F}$

$R_1 := 1\text{K}\Omega$ $\quad R_2 := 3 \cdot \text{k}\Omega$ $\quad R_3 := 0.2\text{k}\Omega$

$$-\frac{R_2 \cdot V_I}{R_1 + R_3 + L \cdot s + C_1 \cdot R_1 \cdot R_3 \cdot s + C_2 \cdot R_1 \cdot R_3 \cdot s + C_2 \cdot L \cdot R_1 \cdot s^2 + C_1 \cdot L \cdot R_3 \cdot s^2 + C_1 \cdot C_2 \cdot L \cdot R_1 \cdot R_3 \cdot s^3} \text{ substitute}, s = j \cdot \omega \rightarrow -\frac{R_2 \cdot V_I}{R_1 + R_3 - C_2 \cdot L \cdot R_1 \cdot \omega^2 - C_1 \cdot L \cdot R_3 \cdot \omega^2 - C_1 \cdot C_2 \cdot L \cdot R_1 \cdot R_3 \cdot \omega^3 \cdot i + C_1 \cdot R_1 \cdot R_3 \cdot \omega \cdot i + C_2 \cdot R_1 \cdot R_3 \cdot \omega \cdot i + L \cdot \omega \cdot i}$$

$$-C_1 \cdot C_2 \cdot L \cdot R_1 \cdot R_3 \cdot \omega^3 + C_1 \cdot R_1 \cdot R_3 \cdot \omega + C_2 \cdot R_1 \cdot R_3 \cdot \omega + L \cdot \omega \text{ solve}, \omega \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{C_1 \cdot C_2 \cdot L \cdot R_1 \cdot R_3 \cdot (L + C_1 \cdot R_1 \cdot R_3 + C_2 \cdot R_1 \cdot R_3)}}{C_1 \cdot C_2 \cdot L \cdot R_1 \cdot R_3} \\ -\frac{\sqrt{C_1 \cdot C_2 \cdot L \cdot R_1 \cdot R_3 \cdot (L + C_1 \cdot R_1 \cdot R_3 + C_2 \cdot R_1 \cdot R_3)}}{C_1 \cdot C_2 \cdot L \cdot R_1 \cdot R_3} \end{bmatrix} \Rightarrow \omega(L, C_1, C_2, R_1, R_3) := \sqrt{\frac{L + R_1 \cdot R_3 \cdot (C_1 + C_2)}{C_1 \cdot C_2 \cdot L \cdot R_1 \cdot R_3}}$$

Expression for the oscillator frequency.

$$R_1 + R_3 - C_2 \cdot L \cdot R_1 \cdot \omega^2 - C_1 \cdot L \cdot R_3 \cdot \omega^2 = -R_2 \text{ solve}, R_2 \rightarrow C_2 \cdot L \cdot R_1 \cdot \omega^2 - R_3 - R_1 + C_1 \cdot L \cdot R_3 \cdot \omega^2$$

$$G_{Critical} := \frac{C_2 \cdot L \cdot R_1 \cdot \omega^2 - R_3 - R_1 + C_1 \cdot L \cdot R_3 \cdot \omega^2}{R_1} \text{ substitute}, \omega = \sqrt{\frac{L + R_1 \cdot R_3 \cdot (C_1 + C_2)}{C_1 \cdot C_2 \cdot L \cdot R_1 \cdot R_3}} \rightarrow \frac{C_1^2 \cdot R_1 \cdot R_3^2 + L \cdot C_1 \cdot R_3 + C_2^2 \cdot R_1^2 \cdot R_3 + L \cdot C_2 \cdot R_1}{C_1 \cdot C_2 \cdot R_1^2 \cdot R_3}$$

$$G(L, C_1, C_2, R_1, R_3) := G_{Critical} \rightarrow \frac{C_1^2 \cdot R_1 \cdot R_3^2 + L \cdot C_1 \cdot R_3 + C_2^2 \cdot R_1^2 \cdot R_3 + L \cdot C_2 \cdot R_1}{C_1 \cdot C_2 \cdot R_1^2 \cdot R_3}$$

$G(L, C_1, C_2, R_1, R_3) = 2.725$ ✓ **Stack Exchange comment said that the gain requirement is 2.9. Close enough.**

$\frac{\omega(L, C_1, C_2, R_1, R_3)}{2 \cdot \pi} = 11.75097 \cdot \text{kHz}$ ✓ **My simulation shows 11.5 kHz, which makes sense because the mathematical analysis ignores the frequency response of the op-amp.**

$$V_I = -\frac{R_2 \cdot V_I}{R_1 + R_3 + L\cdot s + C_1\cdot R_1\cdot R_3\cdot s + C_2\cdot R_1\cdot R_3\cdot s + C_2\cdot L\cdot R_1\cdot s^2 + C_1\cdot L\cdot R_3\cdot s^2 + C_1\cdot C_2\cdot L\cdot R_1\cdot R_3\cdot s^3} \ \text{substitute}, s = j\cdot\omega \ \rightarrow V_I = -\frac{R_2\cdot V_I}{R_1 + R_3 - C_2\cdot L\cdot R_1\cdot\omega^2 - C_1\cdot L\cdot R_3\cdot\omega^2 - C_1\cdot C_2\cdot L\cdot R_1\cdot R_3\cdot\omega^3\cdot i + C_1\cdot R_1\cdot R_3\cdot\omega\cdot i + C_2\cdot R_1\cdot R_3\cdot\omega\cdot i + L\cdot}$$

$$-C_1\cdot C_2\cdot L\cdot R_1\cdot R_3\cdot\omega^3 + C_1\cdot R_1\cdot R_3\cdot\omega + C_2\cdot R_1\cdot R_3\cdot\omega + L\cdot\omega = 0 \ \text{solve}, \omega \ \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{C_1\cdot C_2\cdot L\cdot R_1\cdot R_3\cdot(L + C_1\cdot R_1\cdot R_3 + C_2\cdot R_1\cdot R_3)}}{C_1\cdot C_2\cdot L\cdot R_1\cdot R_3} \\ -\frac{\sqrt{C_1\cdot C_2\cdot L\cdot R_1\cdot R_3\cdot(L + C_1\cdot R_1\cdot R_3 + C_2\cdot R_1\cdot R_3)}}{C_1\cdot C_2\cdot L\cdot R_1\cdot R_3} \end{bmatrix}$$

$$\omega^2 = \frac{L + (C_1 + C_2)\cdot R_1\cdot R_3}{L\cdot R_1\cdot R_3\cdot C_1\cdot C_2} \qquad f(R_1, R_3, L, C_1, C_2) := \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\sqrt{\frac{L + (C_1 + C_2)\cdot R_1\cdot R_3}{L\cdot R_1\cdot R_3\cdot C_1\cdot C_2}}$$

$$f_0 := f(1k\Omega, 0.2k\Omega, 10mH, 0.36\mu F, 0.036\mu F) = 9336.52061\cdot Hz$$

$$R_1 + R_3 - C_2\cdot L\cdot R_1\cdot\omega^2 - C_1\cdot L\cdot R_3\cdot\omega^2 = R_2 \ \left|\begin{array}{l}\text{solve}, \omega \\ \text{simplify}\end{array}\right. \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{L\cdot(C_2\cdot R_1 + C_1\cdot R_3)\cdot(R_1 - R_2 + R_3)}}{C_2\cdot L\cdot R_1 + C_1\cdot L\cdot R_3} \\ -\frac{\sqrt{L\cdot(C_2\cdot R_1 + C_1\cdot R_3)\cdot(R_1 - R_2 + R_3)}}{C_2\cdot L\cdot R_1 + C_1\cdot L\cdot R_3} \end{bmatrix}$$

$$R_{2Critical}(R_1, R_3, L, C_1, C_2, \omega) := R_1 + R_3 - C_2\cdot L\cdot R_1\cdot\omega^2 - C_1\cdot L\cdot R_3\cdot\omega^2$$

$$x := \text{root}(R_{2Critical}(1k\Omega, 0.2k\Omega, 10mH, 0.36\mu F, 0.036\mu F, 2\cdot\pi\cdot x Hz) - 200\Omega, x, 1000, 9000) = 4842.93069$$

$$R_{2Critical}(1k\Omega, 0.2k\Omega, 10mH, 0.36\mu F, 0.036\mu F, 2\cdot\pi\cdot x Hz) = 200\Omega$$

$$w0(R_1, R_2, R_3, L, C_1, C_2) := \frac{\sqrt{L\cdot(C_2\cdot R_1 + C_1\cdot R_3)\cdot(R_1 - R_2 + R_3)}}{C_2\cdot L\cdot R_1 + C_1\cdot L\cdot R_3}$$

$$\frac{w0(1k\Omega, 3k\Omega, 200\Omega, 10mH, 0.36\mu F, 0.036\mu F)}{2\cdot\pi} = 6497.47334i\cdot Hz$$